



۱- باقی مانده تقسیم عدد $200! + \dots + 5! + 4! + 3! + 2! + 1!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

۲- اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $4k + 1$ ، ثابت کنید: $25 | 16k^2 + 28k + 6$

۳- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m | b^n$$

۴- اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است.

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

۵- عکس عبارت «اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن گاه $a \equiv b \pmod{m}$ » را بیان و اثبات کنید.

۶- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۷- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $2 | a + b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ بر ۸ را بیابید.

۸- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 | n^3 - n$.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n = 3k$ و $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3 | n^3 - n$).

۹- ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

۱۰- اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکسان برابر داشته باشند رقم یکسان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

۱۱- جواب های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

۱۲- به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۳- اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۴- آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ ، همواره می توان نتیجه گرفت که $a + c | b + d$ ؟

۱۵- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n | m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$.

۱۶- فرض کنیم، $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.

۱۷- باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۸- به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹- معادله همنهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را به دست آورید.

۲۰- گزینه صحیح را انتخاب کنید:

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب های دو شرطی زیر درست است؟

$$(1) a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (2) a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

$$(3) a < b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (4) a < b \Leftrightarrow a^2 < b^3$$

۲۱- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۲۲- هرگاه a, b, c سه عدد صحیح و $a \neq 0$ و $a|b$ و $a|c$ ثابت کنید: $a|b \pm c$

۲۳- ثابت کنید اگر $p \geq 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود. ($k \in \mathbb{Z}$)

۲۴- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف

اگر a, b, c اعدادی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.



۲۵- در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید.

الف

با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

۲۶- در هر یک از سوالات زیر، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف

عدد 1402 به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه 7 تعلق دارد؟

- (۱) [۵] (۲) [۲] (۳) [۰] (۴) [۱]

ب

باقی‌مانده تقسیم عدد $(9^{100} - 2^{100} - 7^{100})$ بر 14 کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۸

پ

کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟

- (۱) $6x \equiv 11 \pmod{9}$ (۲) $2x \equiv 3 \pmod{5}$ (۳) $5x \equiv 10 \pmod{5}$ (۴) $3x \equiv 10 \pmod{4}$

۲۷- ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

۲۸- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۲۹- برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$